連鎖律の証明

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t} &= (t_1, \cdots, t_m) \text{ とし、} \\ \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = (x_1(\boldsymbol{t}), \cdots, x_n(\boldsymbol{t})) \text{ 及び、} \Psi = \Psi(\boldsymbol{x}) \text{ が一回全微分可能とする。} \end{aligned}$$

このとき、

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t_i} = \sum_{1 \le j \le n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \qquad (1 \le \forall i \le m)$$

が成り立つ。

証明

Ψ が一回全微分可能より、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、充分小さい $\delta > 0$ をとれば、$\|\Delta \boldsymbol{x}\| < \delta$ のとき、

$$\left| \Psi(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}) - \Psi(\boldsymbol{x}) - \sum_{1 \le j \le n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \Delta x_j \right| < \varepsilon \|\Delta \boldsymbol{x}\|$$

が成り立つ。上は特に、

$$\Delta x_j = x_j(t_1, \cdots t_i + \Delta t_i, \cdots, t_n) - x_j(t_1, \cdots t_i, \cdots, t_n) \qquad (1 \le \forall j \le n)$$

の場合にも成り立つ。また、充分小さい $\delta' > 0$ に対して $|\Delta t_i| < \delta'$ とすれば、$\|\Delta \boldsymbol{x}\| < \delta$ かつ、

$$\left| \frac{\Delta x_j}{\Delta t_i} - \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \right| < \varepsilon \qquad (1 \le \forall j \le n)$$

と出来る。よって、

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Psi(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}) - \Psi(\boldsymbol{x})}{\Delta t_i} - \sum_{1 \le j \le n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \right| \\ \le & \left| \frac{\Psi(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}) - \Psi(\boldsymbol{x})}{\Delta t_i} - \sum_{1 \le j \le n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \frac{\Delta x_j}{\Delta t_i} \right| + \left| \sum_{1 \le j \le n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \frac{\Delta x_j}{\Delta t_i} - \sum_{1 \le j \le n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \right| \\ < & \frac{\varepsilon \|\Delta \boldsymbol{x}\|}{|\Delta t_i|} + \varepsilon \sum_{1 \le j \le n} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \right| \\ \le & \varepsilon \sum_{1 \le j \le n} \frac{|\Delta x_j|}{|\Delta t_i|} + \varepsilon \sum_{1 \le j \le n} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \right| \\ \le & \varepsilon \sum_{1 \le j \le n} \left(\left| \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \right| + \varepsilon \right) + \varepsilon \sum_{1 \le j \le n} \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \right| \\ = & \varepsilon \left[\sum_{1 \le j \le n} \left(\left| \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \right| + \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \right| \right) + n\varepsilon \right] \end{aligned}$$

ここで、$\varepsilon' = \varepsilon\left[\sum_{1\le j\le n}\left(\left|\frac{\partial x_j}{\partial t_i}\right| + \left|\frac{\partial \Psi}{\partial x_j}\right|\right) + n\varepsilon\right]$ とおけば、$\varepsilon \to 0$ のとき ε' は任意に小さく出来るから、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial t_i} &= \lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{\Psi(\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}) - \Psi(\boldsymbol{x})}{\Delta t_i} \\
&= \sum_{1\le j\le n} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t_i}
\end{aligned}
$$

が示せた。□